Devoir d'entrainement : corrigé

Exercice 1. 1. Trouver une base du noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soient ℓ_1 et ℓ_2 les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ données pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$\begin{aligned} \ell_1(x, y, z, t) &= x + y - t \\ \ell_2(x, y, z, t) &= y - z. \end{aligned}$$

A l'aide de la question précédente, donner une base de $\mathrm{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$, l'orthogonal de $\mathrm{vect}(\ell_1, \ell_2)$ dans $\mathbb{R}^4$. Justifier.

Corrigé. 1. Il y a deux manières de répondre à cette question. On peut faire des opérations sur les colonnes de la matrice par blocs $\left(\begin{smallmatrix} A \\ I_4 \end{smallmatrix}\right)$, comme vu à de nombreuses reprises en TD. On peut aussi faire le raisonnement suivant.

La matrice A est de rang 2 car ses deux lignes ne sont pas colinéaires. Par le théorème du rang, son noyau est donc de dimension 2. Par ailleurs, on peut vérifier que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent au noyau de A. Comme ils ne sont pas colinéaires et que le noyau est de dimension 2, ils en forment une base.

2. Un vecteur (x, y, z, t) appartient à $\mathrm{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$ si et seulement si $\ell_1(x, y, z, t) = 0$ et $\ell_2(x, y, z, t) = 0$. On remarque que les lignes de la matrice A sont les matrices de ℓ_1, ℓ_2 dans la base canonique. D'où le produit matriciel :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x,y,z,t) \\ \ell_2(x,y,z,t) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que (x, y, z, t) appartient à $\mathrm{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ appartient au noyau de A, et donc que $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1))$ est une base de $\mathrm{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$.

Exercice 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des polynômes 1,X,X^2 et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$. On considère les trois formes linéaires sur E suivantes :

$$\begin{aligned} \ell_1(P) &= P(1) \\ \ell_2(P) &= P'(1) \\ \ell_3(P) &= \int_0^1 P(x)dx \end{aligned}$$

1. Quelles sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans $\mathcal{B}^*$?
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual E^*.
3. Trouver trois polynômes qui forment une base de E dont (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la base duale.

Corrigé. 1. Les coordonnées de ℓ_i dans la base duale de $(1, X, X^2)$ sont obtenus en calculant $\ell_i(1), \ell_i(X), \ell_i(X^2)$ On obtient :

$$\ell_1(1) = 1, \ell_1(X) = 1, \ell_1(X^2) = 1,$$
$$\ell_2(1) = 0, \ell_2(X) = 1, \ell_2(X^2) = 1,$$
$$\ell_3(1) = 1, \ell_3(X) = \tfrac{1}{2}, \ell_3(X^2) = \tfrac{1}{3}.$$

2. Pour montrer que l'on obtient une base, il suffit de vérifier que la matrice composée des coefficients calculés dans la question précédente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

est inversible, c'est à dire de rang 3. Ceci peut se faire en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

3. Notons $\mathcal{B}'$ la base de E que l'on cherche, de sorte que sa base duale est $\mathcal{B}'^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$. D'après le cours,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' =^T (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}\mathcal{B}'^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 6 & -2 & -6 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathcal{B}' = (-3X^2+6X-2, \frac{3}{2}X^2-2X+\frac{1}{2}, 3X^2-6X+3)$ est la base recherchée.